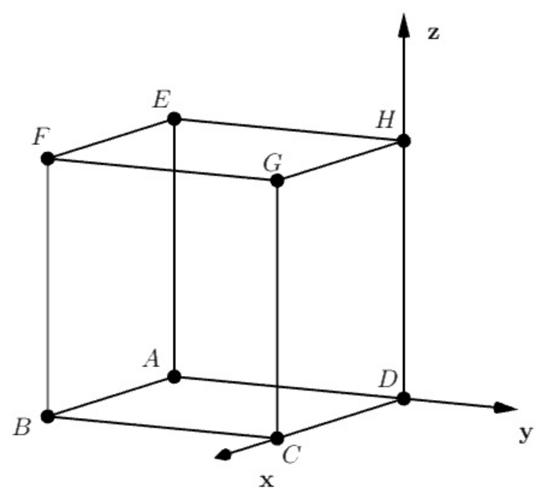
UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
FÍSICA I (FS-1111)
Trimestre Abr-Jul 2008

Elaborado por
Miguel Ángel
12-10423
Ing. Electrónica

Respuestas Primer Parcial Física 1 (30 puntos).

Pregunta 1. (10 puntos) La figura muestra un cubo de lado L. Uno de los vértices, D, está en el origen del sistema de coordenadas cartesianas.

(a) Escriba las expresiones de los vectores $\vec{DB}, \vec{EC}, \vec{GA}, \vec{FD}$ que se indican en la base cartesiana $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ (2 puntos)



Solución:

Expresamos los vectores que nos piden como la suma de vectores de modulo L en la base $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$.

$$\vec{DB} = L\hat{\imath} - L\hat{\jmath}$$
$$\vec{EC} = L\hat{\imath} + L\hat{\jmath} - L\hat{k}$$
$$\vec{GA} = -L\hat{\imath} - L\hat{\jmath} - L\hat{k}$$
$$\vec{FD} = -L\hat{\imath} + L\hat{\jmath} - L\hat{k}$$

(b) Halle los módulos de $\vec{DG}, \vec{AC}, \vec{DF}, \vec{HE}$ (2 puntos)

Solución:

Existen varias formas de responder esta pregunta. Una es expresar el vector, como en la parte anterior, y calcular su módulo de las maneras que usted conoce. La otra forma consiste en observar que los vectores involucrados van de un vértice a otro y, al hablar de un cubo, los vectores estarán pues en: una arista (longitud L), una diagonal de las caras (longitud $\sqrt{2}L$) o una diagonal del cubo (longitud $\sqrt{3}L$).

De manera que solo debemos imaginar el vector y decidir que módulo le corresponde.

$$\vec{DG} = \sqrt{2}L \qquad \vec{AC} = \sqrt{2}L \qquad \vec{DF} = \sqrt{3}L \qquad \vec{HE} = L$$

(c) Calcule los cosenos de los ángulos entre los vectores $\vec{HB}$-$\vec{HD}$ y los vectores $\vec{CE}$-$\vec{AG}$ (2 puntos)

Solución:

Para el ángulo entre los vectores utilizaremos el producto escalar ya que, se conoce que:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha_{AB} \Longrightarrow \cos\alpha_{AB} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} \tag{I}$$

Para el ángulo entre $\vec{HB}$ y $\vec{HD}$:

Escribimos los vectores en la base cartesiana y calculamos sus módulos:

$$\begin{aligned}\vec{HB} &= L\hat{\imath} - L\hat{\jmath} - L\hat{k} \Longrightarrow |\vec{HB}| = \sqrt{3}L\\ \vec{HD} &= -L\hat{k} \Longrightarrow |\vec{HB}| = L\end{aligned}$$

Aplicamos (I) y nos queda:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{HB}\cdot\vec{HD}}{|\vec{HB}||\vec{HD}|} = \frac{\left(L\hat{\imath} - L\hat{\jmath} - L\hat{k}\right)\cdot\left(-L\hat{k}\right)}{\sqrt{3}L^2} = \frac{L^2}{\sqrt{3}L^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Para el ángulo entre $\vec{CE}$ y $\vec{AG}$:

Escribimos los vectores en la base cartesiana y calculamos sus módulos:

$$\begin{aligned}\vec{CE} &= -L\hat{\imath} - L\hat{\jmath} + L\hat{k} \Longrightarrow |\vec{HB}| = \sqrt{3}L\\ \vec{AG} &= L\hat{\imath} + L\hat{\jmath} + L\hat{k} \Longrightarrow |\vec{HB}| = \sqrt{3}L\end{aligned}$$

Aplicamos (I) y nos queda:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{CE}\cdot\vec{AG}}{|\vec{CE}||\vec{AG}|} = \frac{\left(-L\hat{\imath} - L\hat{\jmath} + L\hat{k}\right)\cdot\left(L\hat{\imath} + L\hat{\jmath} + L\hat{k}\right)}{3L^2} = \frac{-L^2 - L^2 + L^2}{3L^2} = -\frac{1}{3} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{3}$$

(d) Calcule el área del triángulo definido por los vectores $\vec{DE}$ y $\vec{DB}$ (2 puntos)

Solución:

Se sabe que el área de un paralelogramo, del cual dos de sus lados están formados por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, está dado por el módulo del producto vectorial de dichos vectores, de manera que el área de un triángulo formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$ no es más que la mitad del área del paralelogramo formado.

$$A_t = \frac{|\vec{A}\times\vec{B}|}{2} \tag{I}$$

Necesitamos calcular el producto vectorial y, al vector resultante, calcularle el módulo para luego aplicar (I).

$$\vec{DE} = -L\hat{\jmath} + L\hat{k} \qquad \vec{DB} = L\hat{\imath} - L\hat{\jmath}$$

El producto vectorial $\vec{DE} \times \vec{DB}$ se puede calcular usando determinantes:

$$\vec{DE} \times \vec{DB} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & -L & L \\ L & -L & 0 \end{vmatrix} = L^2\hat{\imath} + L^2\hat{\jmath} + L^2\hat{k}$$

El módulo del vector resultante es $|\vec{DE} \times \vec{DB}| = \sqrt{3}L^2$

Finalmente, usando (I), el área del triángulo formado por $\vec{DE}$ y $\vec{DB}$ está dado por:

$$A_T = \frac{\sqrt{3}}{2}L^2$$

(e) Halle un vector ortogonal al plano que contiene a los vectores $\vec{AG}$ y $\vec{AF}$ (2 puntos)

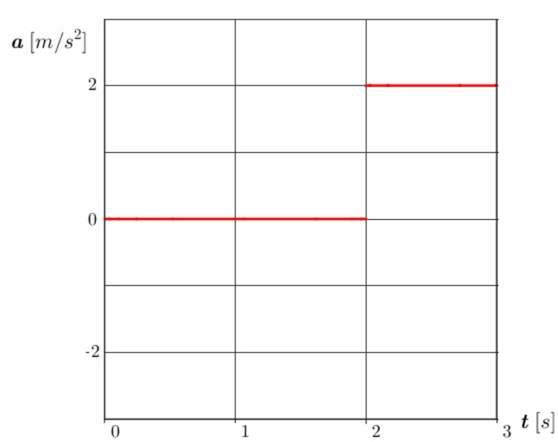
Solución:

Hallar un vector ortogonal al plano formado por estos vectores es equivalente a calcular un vector perpendicular a ambos . Sabemos que el producto vectorial entre dos vectores da como resultado un vector perpendicular a ambos vectores. De manera que el vector ortogonal a $\vec{AG}$ y $\vec{AF}$ esta dado por $\vec{AG} \times \vec{AF}$.

$$\vec{AG} = L\hat{\imath} + L\hat{\jmath} + L\hat{k} \qquad \vec{AF} = L\hat{\imath} + L\hat{k}$$

$$\vec{AG} \times \vec{AF} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ L & L & L \\ L & 0 & L \end{vmatrix} = L^2\hat{\imath} - L^2\hat{k}$$

Pregunta 2. (10 puntos) En la figura se muestra el gráfico de la aceleración en función del tiempo para un partícula que se mueve de forma unidimensional. La partícula parte desde el origen con una velocidad de -1 m/s



(a) Escriba las expresiones de la aceleración, velocidad y posición en función del tiempo (4 puntos).

Solución:

De la gráfica es evidente que la aceleración es una función a trozos discontinua en $t = 2$.

Suponemos que el movimiento ocurre sobre el eje x y definimos el vector unitario $\hat{x}$ como aquel con sentido positivo hacia la derecha. Escribimos la aceleración como:

$$\vec{a}(t) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } 0 < t < 2 \\ 2 & , \quad \text{si } 2 < t < 3 \end{cases} \hat{x} \quad \left[m/s^2\right]$$

Para la velocidad solo debemos recordar que $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}(t)}{dt}$, de donde se deduce que:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t)dt$$

Como la aceleración es una función a trozos, integramos a trozos también.

Para el intervalo $0 < t < 2$, $\vec{a}(t) = \vec{0}$. Luego:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}(t) = -\hat{x} \; [m/s] \text{ si } \; 0 \leq t < 2$$

Para el intervalo $2 < t < 3$, $\vec{a}(t) = 2\hat{x} \;\; [m/s^2]$. Luego:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) = \vec{v}(2) + \int_2^t 2\hat{x}dt \quad &\Longrightarrow \quad \vec{v}(t) = -\hat{x} + 2(t-2)\hat{x} \; [m/s] \\ &\Longrightarrow \quad \vec{v}(t) = (2(t-2) - 1)\hat{x} \; [m/s] \text{ si } \; 2 \leq t < 3 \end{aligned}$$

De manera que la función $\vec{v}(t)$ se escribe como:

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} -1 & , \text{si } 0 \leq t < 2 \\ 2(t-2) - 1 & , \text{si } 2 \leq t < 3 \end{cases} \hat{x} \quad [m/s]$$

Observe que hemos quitado la desigualdad estricta de los puntos $t = 0$ y $t = 2$ para que se cumpla la condición inicial y debido a que la velocidad debe ser, estrictamente, una función continua, respectivamente.

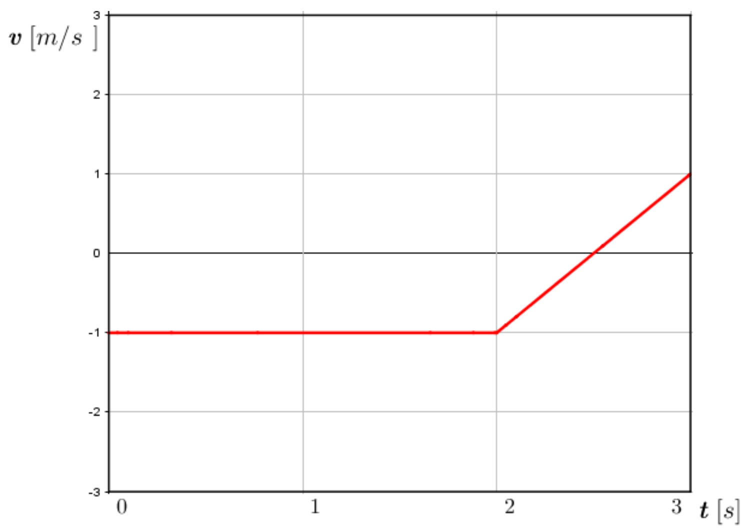
De la misma forma, para la posición debemos recordar que $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$, de donde se deduce que:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t)dt$$

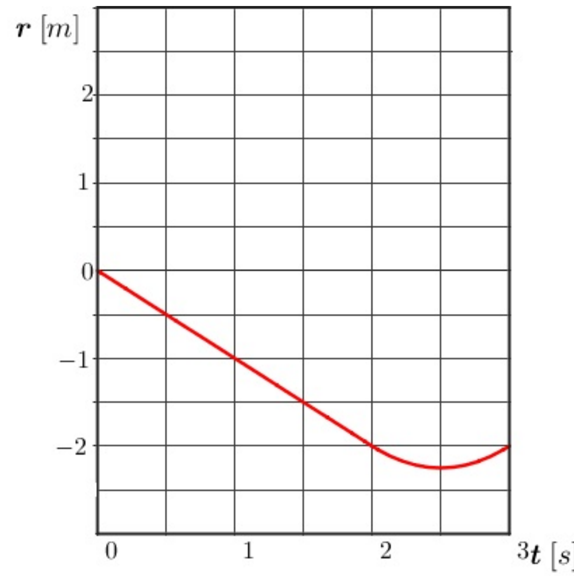
Integramos a trozos y nos queda:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} -t & , \text{si } 0 \leq t < 2 \\ (t-2)^2 - t & , \text{si } 2 \leq t < 3 \end{cases} \hat{x} \quad [m]$$

(b) Grafique $v(t)$ y $r(t)$ (3 puntos)



(a) v(t) vs t



(b) r(t) vs t

(c) ¿ En qué instante se detiene la partícula? (1 punto)

Observando la gráfica de la velocidad se tiene que $v = 0$ para algún t en $(2, 3)$.

$$\vec{v}(t) = 2(t - 2) - 1 \quad \text{, si } 2 \leq t < 3 \qquad v(t) = 0 \Longrightarrow 2(t - 2) - 1 = 0 \Longrightarrow t = \frac{5}{2}s$$

(d) ¿ En qué intervalo disminuye su rapidez? (1 punto)

La rapidez de la partícula disminuye cuando la aceleración y la velocidad tienen sentidos opuestos.

Observando las gráficas de aceleración y velocidad podemos decir que: En el intervalo $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ la velocidad tiene signo negativo mientras que la aceleración es positiva. Luego, la rapidez disminuye en $\left[0, \frac{5}{2}\right]$.

(e) Halle el desplazamiento en el intervalo $[2, 3]$ (1 punto)

Para hallar el desplazamiento podemos calcular $\Delta\vec{r} = \vec{r}(2) - \vec{r}(0)$. Sin embargo, existe una forma más elegante, sabiendo que el desplazamiento neto de una partícula en un intervalo (t_1, t_2) no es más que el área bajo la curva de $v(t)$ en ese mismo intervalo.

Como contamos con la gráfica de $v(t)$, inmediatamente podemos escribir que $\Delta\vec{r} = -2\hat{x}\ m$

Pregunta 3. (5 puntos) Se lanza una piedra desde el suelo con una velocidad inicial que forma un ángulo θ con la horizontal. Luego de un tiempo t_v después del lanzamiento la piedra impacta a una altura H en un edificio. Calcule:

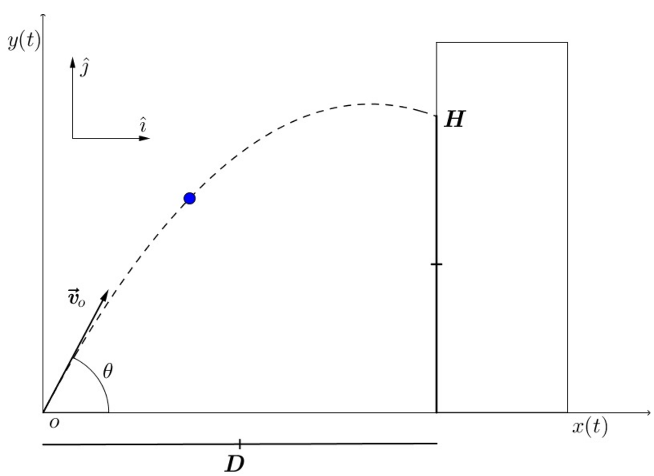
(a) la rapidez inicial, v_o, con la que fue lanzada la piedra (2 puntos),

(b) la separación horizontal, D, entre el punto de lanzamiento y el edificio (1 punto),

(c) el vector velocidad de la piedra justo antes de chocar con el edificio (2 puntos).

Solución:

Inicialmente, como en todos lo problemas de este estilo, se realiza un buen dibujo ilustrando la situación del problema, con el marco de referencia a utilizar.



Para empezar, debemos hallar v_o para lo cual nos dan dos condiciones finales: La altura H a la que se encuentra la piedra luego de un tiempo t_v.

Lo primero que haremos es escribir los vectores posición $\vec{r}(t)$ y velocidad $\vec{v}(t)$ de la piedra suponiendo que conocemos $\vec{v}_o$ y que la posición inicial de la piedra es el origen, situado en el punto O del dibujo.

La aceleración de la piedra una vez lanzada es la aceleración de gravedad, de modo que podemos escribir la aceleración de la piedra como $\vec{a}(t) = -g\hat{\jmath}$.

Además, se sabe que:

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} &\Longrightarrow \vec{v}(t) - \vec{v}(0) = \int_0^t \vec{a}(t)dt \\ &\Longrightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t)dt \qquad \text{(I)} \end{aligned}$$

$\vec{v}(0)$ no es más que la velocidad inicial $\vec{v}_o$. Como nos piden hallar la rapidez de la piedra, es decir, el modulo de su vector velocidad, escribiremos dicho vector de la siguiente manera, dado que conocemos el ángulo de lanzamiento:

$$\vec{v}_o = v_o \cos\theta\hat{\imath} + v_o \sin\theta\hat{\jmath}$$

Luego, de (I) escribimos la velocidad como:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t)dt = v_o \cos\theta \hat{\imath} + v_o \sin\theta \hat{\jmath} - gt\hat{\jmath}$$
$$\implies \vec{v}(t) = v_o \cos\theta \hat{\imath} + (v_o \sin\theta - gt)\hat{\jmath}$$

Ahora podemos escribir el vector posición, puesto que:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \implies \vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t)dt \qquad \text{Con } \vec{r}(0) = \vec{0}$$
$$\implies \vec{r}(t) = v_o t \cos\theta \hat{\imath} + (v_o t \sin\theta - \frac{gt^2}{2})\hat{\jmath}$$

Después de un tiempo t_v la piedra impacta el edificio a una altura H de manera que la componente vertical del vector posición vale H, es decir

$$\vec{r}(t_v) \cdot \hat{\jmath} = H \implies v_o t_v \sin\theta - \frac{gt_v^2}{2} = H \implies v_o = \frac{H + \frac{gt_v^2}{2}}{t_v \sin\theta}$$

Luego, la rapidez con la que fue lanzada la piedra está dada por: $\boxed{v_o = \frac{2H + gt_v^2}{2t_v \sin\theta}}$

Después de un tiempo t_v sabemos que la pelota impacta con el edificio y su posición en y es la altura H. Análogamente la posición de la pelota después de t_v, en x, es D, es decir:

$$\vec{r}(t_v) \cdot \hat{\imath} = D \implies v_o t_v \cos\theta = D \implies \left(\frac{2H + gt_v^2}{2t_v \sin\theta}\right) t_v \cos\theta = D$$

Luego, D está dada por: $\boxed{D = \frac{2H + gt_v^2}{2\tan\theta}}$

Para la última parte, sabemos que el vector velocidad, para todo tiempo t, está dado por:

$$\vec{v}(t) = v_o \cos\theta \hat{\imath} + (v_o \sin\theta - gt)\hat{\jmath}$$

El vector velocidad justo antes de la colisión está dado por:

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t_v) &= v_o \cos\theta \hat{\imath} + (v_o \sin\theta - gt_v)\hat{\jmath} \\
&= \frac{2H + gt_v^2}{2t_v \sin\theta} \cos\theta \hat{\imath} + \left(\frac{2H + gt_v^2}{2t_v \sin\theta} \sin\theta - gt_v\right)\hat{\jmath} \\
&= \frac{2H + gt_v^2}{2t_v \tan\theta} \hat{\imath} + \left(\frac{2H + gt_v^2}{2t_v} - gt_v\right)\hat{\jmath}
\end{aligned}$$

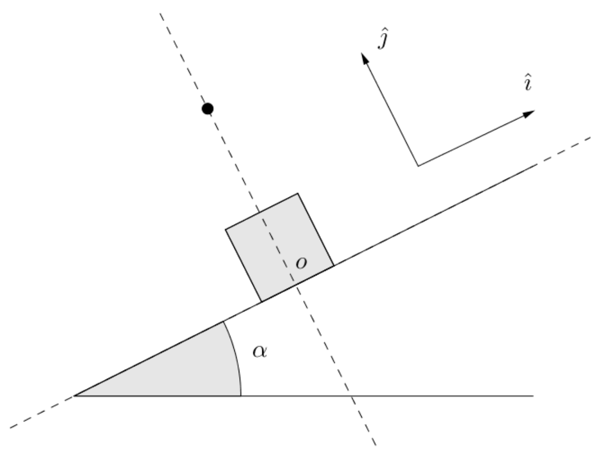
Finalmente: $\boxed{\vec{v}(t_v) = \frac{2H + gt_v^2}{2t_v \tan\theta}\hat{\imath} + \frac{2H - gt_v^2}{2t_v}\hat{\jmath}}$

Pregunta 4. (5 puntos) Un camión sube con una rapidez de 4 m/s por un plano que tiene una inclinación de 30º respecto a la horizontal. Un niño situado en la plataforma del camión lanza una piedra en dirección ortogonal a la plataforma y con una rapidez de 5 m/s respecto al camión. Asuma que la piedra se lanza a a nivel del plano inclinado. Halle:

(a) la velocidad de la piedra respecto a tierra, $\vec{v}_{P/T}$, en el momento del lanzamiento (2 puntos)

Solución:

Realizamos un dibujo mostrando el sistema de referencia a utilizar y la situación planteada en el problema:



Se trata de un problema de cinemática relativa, ya que tenemos dos observadores: Tierra y el camión, y para resolverlo utilizaremos la *Transformación de Galileo* . Observe que la velocidad de la piedra respecto a tierra, $\vec{v}_{P/T}$, se puede escribir como:

$$\vec{v}_{P/T} = \vec{v}_{P/C} + \vec{v}_{C/T}$$

Con $\vec{v}_{P/C}$ y $\vec{v}_{C/T}$ la velocidad de la piedra respecto al camión y la velocidad del camión respecto a tierra, respectivamente.

Por otro lado, tanto $\vec{v}_{P/C}$ como $\vec{v}_{C/T}$ son cantidades conocidas.

$$\vec{v}_{P/C} = 5\hat{\jmath}\ [\text{m/s}] \qquad \vec{v}_{C/T} = 4\hat{\imath}\ [\text{m/s}]$$

Luego: $\vec{v}_{P/T} = \vec{v}_{P/C} + \vec{v}_{C/T} \Longrightarrow \boxed{\vec{v}_{P/T} = 4\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}\ [\text{m/s}]}$

(b) la altura máxima que alcanza la piedra, h_{max}, medida con respecto al punto de lanzamiento (3 puntos)

Solución:

Para resolver esta parte necesitamos las expresión del vector aceleración, para luego obtener los vectores $\vec{v}(t)$ y $\vec{r}(t)$.

La aceleración de la piedra respecto a tierra después de ser arrojada es $\vec{g}$, que con el sistema de referencia planteado, escribimos como:

$$\vec{g} = -g\sin\alpha\hat{\imath} - g\cos\alpha\hat{\jmath} \qquad \text{Con } \alpha = 30^{\text{o}} \text{ y } g = 10\ m/s^2$$

$$\Longrightarrow \vec{g} = -10\left(\frac{1}{2}\hat{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\jmath}\right)$$

$$\Longrightarrow \vec{g} = -5\hat{\imath} - 5\sqrt{3}\hat{\jmath}\ \ [m/s^2]$$

Además, sabemos que la velocidad inicial de la piedra es $\vec{v}_{P/T}$, que acabamos de hallar en la parte anterior, y tomaremos como posición inicial el origen O visto en la figura. De modo que:

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= \vec{v}_{P/T} + \int_0^t \vec{a}(t)dt \\
\Longrightarrow \vec{v}(t) &= 4\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 5t\hat{\imath} - 5\sqrt{3}t\hat{\jmath} \ \ [m/s] \\
\Longrightarrow \vec{v}(t) &= (4 - 5t)\hat{\imath} + (5 - 5\sqrt{3}t)\hat{\jmath} \ \ [m/s]
\end{aligned}$$

También:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \vec{0} + \int_0^t \vec{v}(t)dt \\
\Longrightarrow \vec{r}(t) &= (4t - \frac{5t^2}{2})\hat{\imath} + (5t - \frac{5\sqrt{3}t^2}{2})\hat{\jmath} \ \ [m]
\end{aligned}$$

Ahora, para hallar la h_{max} debemos preguntarnos para que t_m la componente vertical de la velocidad se anula y luego evaluar la componente vertical de la posición para este instante de tiempo.

Para obtener el t_m:

$$\vec{v}(t_m) \cdot \hat{\jmath} = 0 \Longrightarrow 5 - 5\sqrt{3}t_m = 0 \Longrightarrow t_m = \frac{\sqrt{3}}{3} \ s$$

Ahora, evaluamos t_m en la componente vertical de la posición para obtener h_{max}:

$$h_{max} = \vec{r}(t_m) \cdot \hat{\jmath} = 5t_m - \frac{5\sqrt{3}t_m^2}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{2}\frac{1}{3} \ m = \frac{5\sqrt{3}}{6} \ m$$

Finalmente: $\boxed{h_{max} = \frac{5\sqrt{3}}{6} \ m}$

Nota: Este parcial fue resuelto y digitalizado por Miguel Ángel Labrador para GUIAS USB.

Miguel Ángel
12-10423
Ingeniería Electrónica
@miguelangel2801

gecousb.com.ve
Twitter: @gecousb
Instagram: gecousb

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección miguelangel2801@gmail.com